ШИФР УЧАСТНИКА М1103



**ЗАДАНИЕ № 1 (максимальное количество баллов – 7)**

$$3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \leq 2\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 0{,}5 + 0{,}5$

$\cos^2 x - 0{,}5 = 0{,}5 - \sin^2 x$

$$3^{\sin^2 x - 0{,}5} + 3^{\cos^2 x - 0{,}5} \leq 2$$

$$3^{(-\cos^2 x + 0{,}5)} + 3^{(\cos^2 x - 0{,}5)} \leq 2$$

Замена: $\alpha = 3^{\cos^2 x + 0{,}5}$ $\alpha > 0$, т.к. $3 > 0$ $\Rightarrow$ нельзя получить отрицат. число возводя положит. в степень.

$$\Rightarrow \quad \alpha^{-1} + \alpha \leq 2 \quad / \cdot \alpha$$

$$\alpha^2 + 1 - 2\alpha \leq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 \leq 0$$

$$(\alpha - 1)^2 \leq 0$$


$$\Rightarrow \quad \alpha = 1$$

$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases}$

$\cos 2x + 1 - \sin^2 x = 2\cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$

$\dfrac{\cos 2x}{2} = \cos^2 x - 0{,}5$

$$\Rightarrow \quad 3^{\cos^2 x - 0{,}5} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x - 0{,}5 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos 2x}{2} = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$

**ШИФР УЧАСТНИКА** М 1103



**ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 1**

Набранные баллы ________ Подписи членов жюри ________________________

**ШИФР УЧАСТНИКА** М1103



**ЗАДАНИЕ №2 (максимальное количество баллов – 7)**

Допустим, что у есть угол $\alpha \geqslant 120^\circ$

Так как система неравенств симметрическая, тогда без ограничения общности введем: $a \geqslant b \geqslant c$

$\Rightarrow$ $a$ – меньш напротив $\alpha$

$\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow$ т.к. $\alpha \geqslant 120^\circ$ то $a^2 \geqslant b^2 + c^2 + bc$

$$\begin{cases} 2a < \sqrt{3}(b+c) \\ 2b < \sqrt{3}(a+c) \\ 2c < \sqrt{3}(a+b) \end{cases}$$

$\Rightarrow a < \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c) \Rightarrow a^2 < \frac{3}{4}(b+c)^2$

$$b^2 + c^2 + bc \leqslant a^2 < \frac{3}{4}(b+c)^2$$

$$b^2 + c^2 + bc < \frac{3}{4}(b+c)^2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 < \frac{3}{4}(b+c)^2 + bc$$

$$(b+c)^2 - \frac{3}{4}(b+c)^2 < bc$$

$$(b+c)^2 < 4bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 < 4bc$$

$$b^2 - 2bc + c^2 < 0$$

$$(b-c)^2 < 0$$

$\Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ противоречие, а следовательно, в данном треугольнике нет таких углов равных или больших $120^\circ \Rightarrow$ все углы меньше $120^\circ$.

ШИФР УЧАСТНИКА М1103



ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 2

Набранные баллы ________ Подписи членов жюри ________________________

**ШИФР УЧАСТНИКА** М 1103

**ЗАДАНИЕ №3 (максимальное количество баллов – 7)**

$$(2-\sqrt{3})^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$$

Рассмотрим, при $n = 1$:

$$2-\sqrt{3} = \sqrt{3+1} - \sqrt{3}$$

$n = 2$: $(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3} = \sqrt{48+1} - \sqrt{48}$

$n = 3$: $(2-\sqrt{3})^3 = (2-\sqrt{3})(\sqrt{48+1} - \sqrt{48}) =$

$$= \sqrt{(3+1)\cdot(48+1)} - \sqrt{(3+1)(48)}$$

$$- \sqrt{3\cdot(48+1)} + \sqrt{3\cdot 48} =$$

$$= \sqrt{144+3+48+1} - \sqrt{144+48} - \sqrt{144+3}$$

$$+ \sqrt{144} = 12 - \sqrt{192} - \sqrt{147} + \sqrt{196}$$

$$= 26 - \sqrt{192} - \sqrt{147}$$

$$= 26 - 8\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{26^2} - \sqrt{26^2-1}$$

Пусть работает для $n$,

тогда для $n+1$:

$$(2-\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3}) = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$$

мы знаем сопряженное для

мы знаем сопряженное

→ ~~из~~ произведение сопряженных равно сопряженное произведения.

→ мы сможем найти такие $m \in \mathbb{N}$.

ШИФР УЧАСТНИКА м 1103

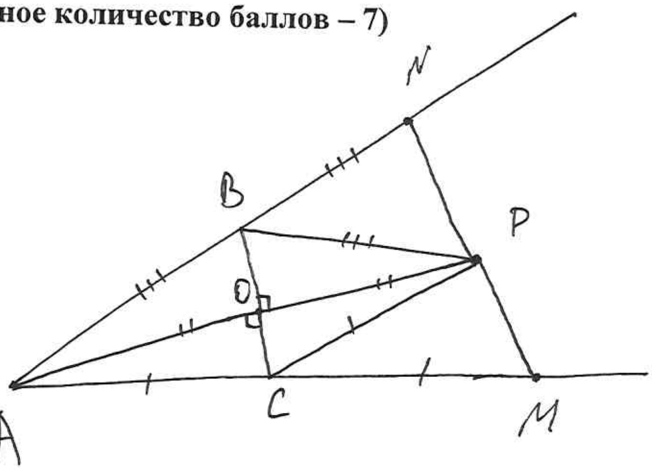


ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 3

Набранные баллы ________ Подписи членов жюри ____________________

ШИФР УЧАСТНИКА М11103

**ЗАДАНИЕ №4 (максимальное количество баллов – 7)**




Дано:

$AB = NB$

$AC = MC$

A симм. P относит. BC

Д-ть:

PA бис-са $\angle MPN$

Д-во:

т.к. P симметрична A относительно BC, то $AO (AP) \perp BC$; $AO = OP$

$\Rightarrow AO = OP$, $OC \perp AP$

$\Rightarrow OC$ – высота и медиана в $\triangle ACP$

$\Rightarrow \triangle ACP$ р/б $\Rightarrow AC = CP = MC$ (из условия)

$\Rightarrow AO = OP$; $BO \perp AP \Rightarrow BO$ – медиана и высота

$\Rightarrow \triangle ABP$ р/б $\Rightarrow AB = BP = BN$ (из условия)

$\Rightarrow$ точки A, N, P равноудалены от B.

$\Rightarrow$ Построим окружност с центром в B и радиусом $= AB$. $\Rightarrow AN$ – диаметр.

$\Rightarrow \angle APN = 90°$ (~~угол опирающий~~ вписаный угол опирающий ся на диаметр).

т.к. A, P, M равноудалены от C, то значит они лежат на одной о-ти. $\Rightarrow r = AC \Rightarrow AM$ – диаметр

$\Rightarrow \angle APM = 90°$ (угол впис. опирающийся на диаметр)

$\Rightarrow \angle APM = \angle APN = 90° \Rightarrow AP$ – бис-са развернутого угла MPN.

ч.т.д.

ШИФР УЧАСТНИКА М 1103



ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 4

Набранные баллы ________ Подписи членов жюри ________________________

**ШИФР УЧАСТНИКА** М1103



**ЗАДАНИЕ №5 (максимальное количество баллов – 7)**

Рассмотрим одну из половин доски (одну из симметричных частей относительно диагонали).

Посмотрим на 15 клеток лежащих на диагонали.

Заметим, что так как ломаная замкнутая и несамопересекающаяся, то ~~максимум две клетки~~ ~~за~~ ровно две клетки из них будут задействованы (вход и выход с другой части) иначе условие будет нарушено.

В одной половине доски $\frac{14+1}{2}\cdot\cancel{14}^{7} = 105$ клеток + 2 с диагонали.

Заметим, что когда мы начнем строить ломаную, из-за того, что четность-нечетность числа клеток в строках не будет совпадать, то мы не сможем закрасить 6 некоторых клеток. (То есть закрашивая очередной столбец/строку мы всякий раз будем получать 6 клеток, так как длина предыдущей прямой может быть меньше только на 2, а не на один, из-за этого через каждые 2 столбца/строки будем терять по клетке: $[15:2-1]=6$.)

$\Rightarrow$ На каждой стороне остается по $105-6=99$ клеток, ~~а следовательно~~ ( + 2 клетки с диагонали. Итого остается $99\cdot 2+2=200$ клеток $\Rightarrow$ Каждой клетке будет соответствовать один кусок ломаной. $\Rightarrow$ длина ломаной $\leq 200$ (мы разобрали случай с ломаной так [illegible]

**ШИФР УЧАСТНИКА** М 1103

**ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 5**

**Набранные баллы** ________ **Подписи членов жюри** ____________________